Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică

algebră geometrie

clasa a VIII-a

partea I

ediția a X-a,
revizuită

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Cuprins

GEOMETRIE

Capitolul I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Capitolul I
Intervale de numere reale. Inecuaţii în $\mathbb{R}$

PP **Competenţe specifice**

C1. Recunoaşterea apartenenţei unui număr real la o mulţime

C2. Efectuarea unor operaţii cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulţimi definite printr-o proprietate a elementelor ei

C3. Utilizarea unor procedee matematice pentru operaţii cu intervale şi rezolvarea inecuaţiilor în $\mathbb{R}$

C4. Folosirea terminologiei aferente noţiunilor de mulţime, de interval numeric şi de inecuaţii

C5. Interpretarea unei situaţii date utilizând intervale şi inecuaţii

C6. Rezolvarea unor situaţii date, utilizând intervale numerice sau inecuaţii

PE-PP 1. Mulţimi de numere. Forme de scriere a unui număr

Mulţimea numerelor naturale, notată cu $\mathbb{N}$, este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Observaţii:

a) Mulţimea notată cu $\mathbb{N}^*$ este $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ şi $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

b) Avem, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$:

i) $x + y \in \mathbb{N}$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$ şi **consecinţele**: $x + y = 0$ înseamnă $x = y = 0$, iar $x \cdot y = 1$ înseamnă $x = y = 1$.

ii) $x - y \in \mathbb{N}$ numai dacă $x \geq y$, iar $x : y \in \mathbb{N}$ numai dacă **există** $z \in \mathbb{N}$ astfel încât $y \cdot z = x$. Dacă acest lucru nu are loc, se foloseşte teorema **împărţirii cu rest**: $x = yz + t$, cu $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq t < y$, $y \neq 0$.

iii) $x^y \in \mathbb{N}$, cu excepţia cazului 0^0.

Mulţimea numerelor întregi, notată cu $\mathbb{Z}$, este:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Observaţii:

a) $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; în plus, se definesc: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1\}$ şi $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

b) Pentru $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, avem:

i) $x + y \in \mathbb{Z}, x - y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}$.

ii) Dacă $x^2 + y^2 = 0$, atunci $x = y = 0$.

iii) $x : y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ dacă şi numai dacă există $z \in \mathbb{Z}$, cu $x = yz$. În caz contrar, $x = yz + t$, unde $t \in \mathbb{Z}$ şi $0 \leq |t| < |y|$.

Mulţimea numerelor raţionale, notată cu $\mathbb{Q}$, este:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid \text{există } y, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{y}{z}\right\}.$$

Observaţii:

a) Avem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, iar mulţimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ se numeşte mulţimea numerelor raţionale **neîntregi**. De asemenea, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

b) Un **număr raţional** este reprezentat de o fracţie de forma $\frac{x}{y}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ şi $y \in \mathbb{Z}^*$. Vom spune că două fracţii $\frac{x}{y}$ şi $\frac{z}{t}$, cu $x, z \in \mathbb{Z}$ şi $y, t \in \mathbb{Z}^*$, se numesc **fracţii echivalente** dacă $xt = yz$. Dată o fracţie $\frac{x}{y}$, se obţin fracţii echivalente cu ea prin:

i) **amplificare**: $^{t)}\frac{x}{y} = \frac{x \cdot t}{y \cdot t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ şi $y, t \in \mathbb{Z}^*$;

ii) **simplificare**: $\frac{x}{y}^{(t} = \frac{x : t}{y : t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$, $y, t \in \mathbb{Z}^*$ şi $t \mid x$, $t \mid y$.

c) O **fracţie** $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ este **ireductibilă** dacă $(x, y) = 1$.

Un **număr raţional** care este **reprezentat** de o fracţie $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, se scrie sub formă **zecimală** împărţind numărătorul x la numitorul y.

În funcţie de factorii în care se descompune numitorul fracţiei ireductibile $\frac{x}{y}$, fracţia zecimală poate fi:

i) **fracţie zecimală finită**, dacă în descompunerea numitorului apar **factori** de **2** sau de 5;

ii) **fracţie zecimală periodică simplă**, dacă descompunerea numitorului în produs de **factori** primi conţine **alţi** factori decât **2** şi **5**;

iii) **fracţie zecimală periodică mixtă**, dacă descompunerea numitorului în produs de factori primi conţine atât factori de 2 sau/şi numai factori de 5, cât şi un alt factor prim.

Reciproc: Dacă un număr raţional este reprezentat printr-o **fracţie zecimală**, el poate fi scris sub formă de **fracţie ordinară** folosind **reguli de transformare** pentru fiecare tip de fracţie zecimală:

i) **fracţie zecimală finită**: $\overline{a,b_1b_2b_3...b_n}=\frac{\overline{ab_1b_2b_3...b_n}}{10^n}$;

ii) **fracţie zecimală periodică simplă**: $\overline{a,(b_1b_2b_3...b_n)}=a\frac{\overline{b_1b_2b_3...b_n}}{\underbrace{99...9}_{\text{de } n \text{ ori}}}$;

iii) **fracţie zecimală periodică mixtă**:

$$\overline{a,b_1b_2...b_n(c_1c_2...c_m)}=\frac{\overline{ab_1b_2...b_nc_1c_2...c_m}-\overline{ab_1b_2...b_n}}{\underbrace{999...9}_{\text{de } m \text{ ori}}\underbrace{000...0}_{\text{de } n \text{ ori}}}.$$

d) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$, avem $x+y \in \mathbb{Q}$, $x-y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$, $x:y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$, $x^y \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

Mulţimea numerelor iraţionale, notată cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, este mulţimea numerelor care se scriu zecimal cu o **infinitate** de zecimale care **nu se repetă** periodic.

Mulţimea numerelor reale, notată cu $\mathbb{R}$, este mulţimea formată din **reuniunea** mulţimii numerelor raţionale cu mulţimea numerelor iraţionale. În mod asemănător, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Avem **şirul incluziunilor**: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; d) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{N}$; e) $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$;

f) $\mathbb{Z}\not\subseteq\mathbb{N}$; g) $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Q}$; h) $\mathbb{Q}\not\subseteq\mathbb{Z}$; i) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; j) $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$;

k) $\mathbb{R}\not\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; l) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$; m) $\varnothing\subseteq\mathbb{Q}$; n) $\varnothing\not\subseteq\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}^*$; o) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{N}^*$.

2. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $8\in\mathbb{N}$; b) $8\in\mathbb{Z}$; c) $8\in\mathbb{Q}$; d) $8\in\mathbb{R}$; e) $-6\in\mathbb{Z}$;

f) $-6\in\mathbb{N}$; g) $-\frac{7}{3}\in\mathbb{Q}$; h) $-8{,}3\in\mathbb{R}$; i) $-\frac{9}{3}\in\mathbb{Z}$; j) $4{,}(5)\in\mathbb{Q}$;

k) $\sqrt{8}\in\mathbb{R}$; l) $\sqrt{8}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; m) $\sqrt{25-(-3)\cdot(-8)}\in\mathbb{N}$; n) $[-(-3)+(-2)]^2\in\mathbb{Z}$.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sqrt{2\frac{1}{4}}\in\mathbb{Q}$; b) $\sqrt{0{,}(2)}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; c) $\sqrt{2^{2^2}\cdot3^3}\in\mathbb{Z}$;

d) $0{,}(3)+\sqrt{0{,}(4)}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; e) $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3}\in\mathbb{N}$; f) $\sqrt{2^3\cdot3^2+3\sqrt{144}}\in\mathbb{Z}$;

g) $\{0\}\in\mathbb{R}$; h) $0\notin\mathbb{R}^*$; i) $\{0\}\subset\mathbb{R}$; j) $2\in\mathbb{Q}\setminus\{-2, 2\}$.

4. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Produsul a două numere iraționale este un număr irațional.
b) Suma oricăror două numere iraționale este un număr irațional.
c) Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.
d) Produsul dintre orice număr irațional și orice număr rațional nenul este un număr irațional.
e) Pătratul oricărui număr irațional este un număr rațional.
f) Orice număr irațional ridicat la puterea zero este un număr natural.

5. Amplificați fracțiile: $\frac{6}{10}, \frac{18}{25}, \frac{3}{5}, \frac{7}{4}$ astfel încât să aibă același numitor.

6. Se consideră fracțiile: $\frac{a}{10}, \frac{a}{12}, \frac{a}{15}$ și $\frac{a}{30}$, unde $a \neq 0$. Determinați cea mai mică valoare naturală a numărului a, pentru care fracțiile reprezintă simultan numere naturale.

7. a) Care dintre fracțiile: $\frac{1}{4}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{18}, \frac{12}{20}, \frac{7}{15}, \frac{30}{25}, \frac{30}{50}$ sunt echivalente cu fracția $\frac{3}{5}$?

b) Amplificați cu 4 fracțiile: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{13}{99}, \frac{8}{13}, \frac{5}{11}$.

c) Simplificați cu 5 fracțiile: $\frac{5}{20}, \frac{15}{30}, \frac{10}{175}, \frac{20}{45}, \frac{25}{110}, \frac{30}{85}$.

8. Determinați din șirul următor de fracții:

$$\frac{1}{2}, \frac{61}{37}, \frac{2}{6}, \frac{55}{1133}, \frac{4}{21}, \frac{3}{9}, \frac{8}{15}, \frac{14}{2\cdot 7}, \frac{85}{15}, \frac{35}{56}, \frac{19}{72}, \frac{4\cdot 3\cdot 5}{60}$$

pe cele care sunt: (i) ireductibile; (ii) subunitare; (iii) supraunitare; (iv) echiunitare.

9. Determinați valorile lui x, număr natural, pentru care:

a) (i) $\frac{8}{x-3} \in \mathbb{N}$; (ii) $\frac{6}{x-2} \in \mathbb{Z}$; (iii) $\frac{15}{2x-1} \in \mathbb{N}$; (iv) $\frac{21}{2x+1} \in \mathbb{N}$;

b) mulțimile $A = \{4x, 6x + 2\}$ și $B = \{2x - 1, 2x + 1, 3x + 2\}$ au un singur element comun;

c) mulțimile $A = \{2x - 3, 3x - 1\}$ și $B = \{4x - 7, x + 3\}$ sunt egale.

10. Scrieți sub formă zecimală următoarele fracții:

$$\frac{4}{5}, \frac{64}{25}, \frac{5}{16}, \frac{17}{125}, \frac{13}{3}, \frac{8}{15}, \frac{28}{15}, \frac{17}{6}, \frac{35}{18}.$$

11. Scrieți sub formă de fracție ordinară următoarele fracții zecimale: 4,15; 2,(18); 0,3(54); 2,534; 0,35(4); 1,8(6); 13,85; 5,02(7); 1,0025; 0,008; 2,00(3).

12. Determinați mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq x^2 \leq 50\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 24 \leq x^2 \leq 121\}$;

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 18 \leq 2x^2 \leq 98\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 48 \leq 3x^2 \leq 192\}$;

$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq \sqrt{x} \leq 7, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$; $F = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq \sqrt{x} < 10, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$.

13. Fie mulțimea $A = \{0; -4; 25; -64; 0,36; 0,4; 3,(27)\}$. Determinați mulțimea $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \in A\}$.

14. Fie mulțimea $A = \left\{\sqrt{12};\ -\sqrt{\frac{2}{3}};\ \sqrt{3\frac{1}{5}};\ \left(-\sqrt{2}\right)^{-1};\ -\sqrt{7};\ \sqrt{0,(3)}\right\}$.

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $A \subset \mathbb{R}$; b) $A \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; c) $A \subset \mathbb{Q}$.

15. Fie mulțimea $A = \left\{\left(\sqrt{3}\right)^{-1}; \left(-\sqrt{2}\right)^{3}; \sqrt{2\frac{2}{3}}; -\sqrt{150}; \sqrt{192}; \sqrt{5^3}; -\sqrt{2^5}\right\}$.

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $A \subset \mathbb{Q}$; b) $A \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; c) $A \not\subset \mathbb{R}$.

16. Fie mulțimea $A = \left\{(-2)^2; (-3)^{-2}; \sqrt{0,09}; \sqrt{5\frac{5}{9}}; (-1)^4; \sqrt{18}; \sqrt{1\frac{2}{25}}; \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}; \sqrt{5\frac{3}{9}}\right\}$.

Determinați mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap \mathbb{R}$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

17. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x+3 \mid 36\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x+1 \mid 45\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 27 \text{ și } 8 \mid x+5\}$; $D = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{15}{2x+1} \in \mathbb{N}\right\}$;

$E = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{21}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$; $F = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x+5}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$;

$G = \left\{x \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\} \mid \frac{3x+11}{x+2} \in \mathbb{Z}\right\}$; $H = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+9}{2x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

În rezolvarea exercițiilor următoare folosiți, dacă este cazul, formula:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \text{ unde } C^2 = A^2 - B.$$

18. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\sqrt{5} - \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{45} = \sqrt{20} + \sqrt{5}$;

c) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$; d) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$;

e) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$; f) $\sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = \left(\sqrt{2}\right)^2$.

19. Demonstrați că următoarele numere nu sunt raționale:

a) $\sqrt{5n+3}$; b) $\sqrt{5n+8}$; c) $\sqrt{7n+3}$;

d) $\sqrt{n^2+n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; e) $\sqrt{4n^2+n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; f) $\sqrt{2007^{2010} - 2006^{2010}}$;

g) $\sqrt{1+3+3^2+\ldots+3^{2010}}$; h) $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2011 + 3}$; i) $\sqrt{456^{564} + 321^{312} + 215^{804}}$.

20. Arătați că $\sqrt{2-\sqrt{3}+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

PE Aprofundare și performanță ***

21. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$; b) $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$; d) $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$,

unde $x = \sqrt{441 + 2 + 4 + 6 + ... + 880}$.

22. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$; b) $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$; c) $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$,

unde $x = \sqrt{243^2 - (240^2 + 3 \cdot 240)}$.

23. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $x \in \mathbb{R}$; b) $x \in \mathbb{Q}$; c) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $x \in \mathbb{Z}$,

unde $x = \sqrt{2010 + 2(1 + 2 + 3 + ... + 2009)}$.

24. Determinați mulțimile:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} \,\middle|\, \dfrac{\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}}{x - 2} \in \mathbb{Z} \right\}$;

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{21}} + \sqrt{39 + 12\sqrt{3}} + \sqrt{16 - 6\sqrt{7}}}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\}$;

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} + \sqrt{41 + 12\sqrt{5}}}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

25. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$, știind că acestea îndeplinesc condițiile: $\overline{ab} \vdots 5$ și $\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} \in \mathbb{Q}$.

26. a) Arătați că $a = \sqrt{9^n \cdot 2^{2n+1} - 4^n \cdot 3^{2n}} \in \mathbb{Q}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $a = 216$.

27. Determinați cifra x, în baza 10, astfel încât:

a) $\sqrt{\dfrac{\overline{14x}}{27}} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{\dfrac{\overline{12x}}{18}} \in \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{\dfrac{\overline{72x}}{5}} \in \mathbb{Z}$; d) $\sqrt{\dfrac{\overline{18x}}{4}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

PE-PP Supermate ****

28. Determinați numerele raționale a și b care îndeplinesc condiția:

a) $\dfrac{a}{\sqrt{2} - 1} + \dfrac{b}{\sqrt{2} + 1} = 7 - 3\sqrt{2}$; b) $a(2 + \sqrt{5}) + \dfrac{b}{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{5} + 4$;

c) $a\sqrt{3} + \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{\sqrt{3} - 1} = 2\sqrt{3} + 5$.

29. Fie numărul rațional $r \in \mathbb{Q}$. Dacă $11r \in \mathbb{Z}$ și $13r \in \mathbb{Z}$, demonstrați că $r \in \mathbb{Z}$.

Nume ______________________________ Clasa ________

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$, pentru care fracția $\frac{18}{\overline{1a}}$ este ireductibilă, sunt ....

(0,5p) **2.** A patruzecea zecimală a fracției 0,25(123) este ....

(0,5p) **3.** Valorile naturale ale lui x, pentru care fracția $\frac{7}{2x+1}$ este supraunitară, sunt ....

(0,5p) **4.** Valoarea naturală a lui x, pentru care fracțiile $\frac{12}{x+16}$ și $\frac{16}{x+28}$ sunt echivalente, este ....

(0,5p) **5.** Dintre fracțiile 2,3(5) și 2,(35), mai mare este ....

(0,5p) **6.** Fie $a=\sqrt{6}\left(\sqrt{54}+\sqrt{216}\right)$. Valoarea de adevăr a propoziției $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este ....

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Forma ordinară corespunzătoare fracției zecimale 2,08(3) este:

A. $\frac{1883}{900}$ B. $\frac{1880}{900}$ C. $\frac{1230}{900}$ D. $\frac{25}{12}$

(0,5p) **2.** Forma zecimală a fracției $\frac{37}{20}$ este:

A. 0,85 B. 1,85 C. 2,15 D. 0,185

(0,5p) **3.** Dacă $a=\sqrt{30^2-24^2}$, atunci valoarea lui a este:

A. 16 B. 18 C. 6 D. 12

(0,5p) **4.** Se consideră mulțimea:

$$A=\left\{\sqrt{0,(8)};\ \frac{-21}{-7};\ \sqrt{2,25};\ \sqrt{6\frac{1}{4}};\ -\frac{14}{2};\ \sqrt{3\frac{1}{9}};\ (-2)^3\right\}.$$

Cardinalul mulțimii $A \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ este:

A. 4 B. 5 C. 3 D. 6

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Arătați că numărul $a=\sqrt{288^2-285\cdot 288-135}$ este număr rațional.

(1p) **2.** Calculaţi $A \cap B$, unde $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{15}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$ şi $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{4x+23}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

(1p) **3.** Determinaţi $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{52-14\sqrt{3}}}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

(1p) **4.** Determinaţi cifrele a şi b, cu $a < b$, pentru care $\sqrt{0,a(b) + 0,b(a)} \in \mathbb{Q}$.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

PE-PP

2. Reprezentarea pe axă. Ordonarea numerelor reale. Valoarea absolută. Aproximarea numerelor reale

Axa numerelor reale este o dreaptă pe care fixăm un punct O, numit **origine**, un **sens pozitiv** şi o **unitate de măsură**. Oricărui punct A de pe axă i se pune în corespondenţă un **unic număr real**, numit **abscisa punctului** şi notat x_A (scriem $A(x_A)$), respectiv oricărui număr real îi corespunde un unic punct pe axa numerelor reale, numit **imaginea** sa.

Dacă pe axa numerelor reale considerăm punctele $A(x_A)$ şi $B(x_B)$, atunci **lungimea segmentului** AB este numărul $AB = |x_B - x_A|$.

Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Spunem că $x \leq y$ dacă există un număr $z \geq 0$ astfel încât $x + z = y$.

În reprezentarea pe axă, cu sensul pozitiv spre dreapta, mai mare este numărul situat mai spre dreapta.

Fie $x \in \mathbb{R}$. **Modulul** sau **valoarea absolută** a numărului real x este numărul notat prin $|x|$ şi care, prin definiţie, este egal cu $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Amintim două proprietăţi importante pentru modul:

(i) $|x| = |-x|$; (ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Fie $x \in \mathbb{R}$. Se numeşte **partea întreagă** a numărului x numărul notat prin $[x]$ care este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Observaţie: Fie $x \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi:

(i) $[x] \leq x < [x] + 1$; (ii) $[x + n] = [x] + n$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

Fie $x \in \mathbb{R}$. Se numeşte **partea fracţionară** a numărului x numărul notat prin $\{x\}$ care este egal cu $\{x\} = x - [x]$.

Observaţie: $0 \leq \{x\} < 1$. Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $\{x + n\} = \{x\}$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple: a) $[+4] = 4$; $[-4] = -4$; $[4{,}1] = 4$; $[-4{,}1] = -5$; $[4{,}1 + 11] = [4{,}1] + 11 = 4 + 11 = 15$; $[-4{,}1 + 11] = [-4{,}1] + 11 = -5 + 11 = 6$.

b) $\{4\} = 0$; $\{4{,}1\} = 0{,}1$; $\{-4{,}1\} = -4{,}1 - (-5) = 5 - 4{,}1 = 0{,}9$.

Orice număr real $x \in \mathbb{R}$ poate fi înlocuit cu o valoare numită **aproximarea** sa.

Cele mai folosite **procedee de aproximare** sunt:

a) **aproximarea prin lipsă sau adaos**. Fie x un număr real scris în formă zecimală. Aproximarea prin lipsă sau adaos se face la puterile lui 10 din scrierea sa zecimală:

(i) **aproximarea prin lipsă** nu modifică cifra aflată pe poziţia puterii lui 10 din scrierea zecimală a numărului;

(ii) **aproximarea prin adaos** modifică cifra aflată pe poziţia puterii lui 10 mărind-o cu o unitate din scrierea zecimală a numărului.